Курсова робота

Вивчення функцій рядів Фур'є

Зміст

Введення

1. Визначення коефіцієнтів по методу Ейлера-Фур'є

2. Ортогональні системи функцій

3. Інтеграл Дирихле. Принцип локалізації

4. Подання функцій рядом Фур'є

5. Випадок неперіодичної функції

6. Випадок довільного проміжку

7. Випадок парних і непарних функцій

8. Приклади розкладання функцій у ряд Фур'є

Список використаної літератури

Введення

У науці й техніку часто доводитися мати справу з періодичними явищами, тобто такими, які відтворюються в колишньому виді через певний проміжок часу Т, що називається періодом. Наприклад, рух парової машини повторюється, після того як пройде повний цикл. Різні величини, пов'язані з періодичним явищем, після закінчення періоду Т вертаються до своїх колишніх значень і являють собою періодичні функції від часу t з періодом Т.

Якщо не вважати постійної, то найпростішою періодичною функцією є синусоїдальна величина: , де є частота, пов'язана з періодом Т співвідношенням:

.

З подібних найпростіших періодичних функцій можуть бути складені й більше складні. Ясно, що тридцятимільйонні синусоїдальні величини повинні бути різних частот, інакше їхнє додавання не дає нічого нового, а знову приводить до синусоїдальної величини, причому тієї ж частоти. Якщо ж скласти величини виду:

 (1)

які мають різні частоти

,

те вийде періодична функція, але вже що істотно відрізняється від величин, що входять у суму.

Розглянемо для приклада додавання трьох синусоїдальних величин:

На малюнку ми бачимо, що графік функції отриманої в результаті додавання трьох синусоїдальних величин (показаний суцільною лінією) уже значно відрізняється від синусоїди. Більшою мірою це має місце для суми нескінченного ряду величин виду (1).

Тепер виникає зворотне питання: чи можна дану періодичну функцію представити у вигляді суми кінцевої або нескінченної множини синусоїдальних величин виду (1).

Як буде показано нижче, на це питання можна відповісти задовільно, але тільки лише використовуючи нескінченну послідовність величин виду (1). Для функцій деякого класу має місце розкладання в "тригонометричний ряд":

 (2)

З геометричної точки зору це означає, що графік періодичної функції виходить шляхом накладення ряду синусоїд. Якщо ж кожну синусоїдальну величину витлумачити механічно що як представляє гармонійні коливальні явища, то можна сказати, що тут складне коливання розкладається на окремі гармонійні коливання. Виходячи із цього, окремі синусоїдальні величини, що входять до складу розкладання (2), називають гармонійними функції або просто її першої, другий і т.д. гармоніками. Сам же процес розкладання періодичної функції на гармоніки зветься гармонійного аналізу.

Якщо за незалежну змінну вибрати

,

те вийти функція, що залежить від х, так само періодична, але вже зі стандартним періодом Розкладання (2) у цьому випадки прийме вид:

 (3)

Тепер розгорнувши члени цього ряду по формулі синуса суми й позначивши

ми прийдемо до остаточної форми тригонометричного розкладання:

 (4)

У даному розкладанні функція від кута х, що має період розкладена по косинусах і синусам кутів, кратних х.

Ми прийшли до розкладання функції в тригонометричний ряд, відправляючись від періодичних, коливальних явищ і пов'язаних з ними величин. Подібні розкладання часто виявляються корисними й при дослідженні функцій, заданих у певному кінцевому проміжку й зовсім не породжених ніякими коливальними явищами.

1. Визначення коефіцієнтів по методу Ейлера-Фур'є

У попередньому параграфі було сказано, що існує ряд функцій, які можна представити у вигляді нескінченного тригонометричного ряду. Для того, що б установити можливість розкладання деякої функції , що має період у тригонометричний ряд виду:

 (4)

потрібно мати набір коефіцієнтів

Прийом для знаходження цих коефіцієнтів у другій половині XVIII століття був застосований Ейлером і незалежно від нього на початку XIX Фур'є. Надалі будемо припускати функцію безперервної або у проміжку . Допустимо, що розкладання (4) має місце. Інтегруємо його по членне від до ; у результаті одержимо:

Але, як легко бачити,

 (5)

Тому всі члени під знаком суми будуть рівнятися нулю, і остаточно одержуємо

 (6)

Для того щоб знайти значення коефіцієнта , помножимо обидві частини рівності (4) на й знову інтегруємо по членне в тім же проміжку:

У виді (5) .

якщо , і, нарешті,

 (9)

Таким чином, звертаються в нуль всі інтеграли під знаком суми, крім інтеграла, при якому множником є саме коефіцієнт . Звідси одержуємо:



Аналогічно, множачи розкладання (4) на й потім, інтегруючи по членне, визначимо коефіцієнт при синусі:



Формули, по яких обчислюються коефіцієнти , називаються формулами Ейлера-Фур'є, а самі коефіцієнти називаються коефіцієнтами Фур'є для даної функції. І, нарешті, тригонометричний ряд (4), складений по цих коефіцієнтах, одержав назву ряд Фур'є для даної функції.

Дамо тепер звіт у тім, яка логічна цінність проведених міркувань. Ми виходили з того, що тригонометричний ряд (4) має місце, тому питання про те, чи відповідає це дійсності, залишається відкритим. Ми користувалися повторно по членним інтегруванням ряду, а ця операція не завжди можна, достатньою умовою для застосування операції є рівномірна збіжність ряду. Тому строго встановленою умовою можна вважати лише наступне:

якщо функція f(x) розкладається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд (4), то цей ряд буде її поруч Фур'є.

Якщо ж не припускати наперед рівномірності збіжності, то всі наведені вище міркування не доводять навіть того, що функція може розкладатися тільки в ряд Фур'є. Ці міркування можна розглядати лише як наведення, достатнє для того, щоб у пошуках тригонометричного розкладання даної функції почати її з ряду Фур'є, зобов'язуючись установити умови, при яких він сходиться й притім саме до даної функції.

Поки цього не зроблено, ми маємо право лише формально розглядати ряд Фур'є даної функції, але не можемо про нього нічого затверджувати, крім того, що він "породжений" функцією f(x). Цей зв'язок звичайно позначають так:

уникаючи знака рівності.

2. Ортогональні системи функцій

Дві функції й певні на проміжку називаються ортогональними на цьому проміжку, якщо інтеграл від їхнього добутку дорівнює нулю:

Розглянемо систему функцій , певних у проміжку [a, b] і безперервних або кусочно-безперервних. Якщо всі функції даної системи попарно ортогональні, тобто



те неї називають ортогональною системою функцій. При цьому завжди будемо думати, що

Якщо , то система називається нормальної. Якщо ж ця умова не виконується, то можна перейти до системи , що уже свідомо буде нормальною.

Найважливішим прикладом ортогональної системи функцій саме і є тригонометрична система

 (10)

у проміжку , що ми розглядали раніше. Її ортогональність треба зі співвідношень (5), (7), (8). Однак вона не буде нормальної через (9). Множачи тригонометричні функції (10) на належні множники, легко одержати нормальну систему:

 (10\*)

Нехай у проміжку дана яка-небудь ортогональна система функцій . Задамося метою розкласти певну у функцію в "ряд по функціях " виду:

 (11)

Для визначення коефіцієнтів даного розкладання надійдемо так само, як ми це зробили в попередньому параграфі, а саме помножимо обидві частини рівності на й інтегруємо його по членне:

У силу ортогональності системи, всі інтеграли праворуч, крім одного, будуть дорівнюють нулю, і легко виходить:

 (m=0, 1, 2, …) (12)

Ряд (11) з коефіцієнтами, складеними по формулах (12), називається узагальненим рядом Фур'є даної функції, а самі коефіцієнти-її узагальненими коефіцієнтами Фур'є щодо системи . У випадки нормальної системи функцій коефіцієнти будуть визначатися в такий спосіб:

У даному випадки всі зауваження зроблені в попередньому параграфі необхідно повторити. Узагальнений ряд Фур'є, побудований для функції , пов'язаний з нею лише формально й у загальному випадку цей зв'язок позначають у такий спосіб:

Збіжність цього ряду, як і у випадку тригонометричного ряду, підлягає ще дослідженню.

3. Інтеграл Дирихле Принцип локалізації

Нехай буде безперервна або кусочно-безперервна функція з періодом . Обчислимо постійні (її коефіцієнти Фур'є):





і по них складемо ряд Фур'є нашої функції

Як бачимо, тут коефіцієнт ми визначили по загальній формулі для при , але зате вільний член ряду запишемо у вигляді .

Якщо функція F(x) кусочно-безперервна в будь-якому кінцевому проміжку й до того ж має період , то величина інтеграла

по колишньому проміжку довжини не залежить від .

Дійсно, маємо

Якщо в останньому інтеграла зробити підстановку , то він доведеться до інтеграла

і лише знаком буде відрізнятися від першого інтеграла. Таким чином, розглянутий інтеграл виявляється рівним інтегралу

уже не утримуючому .

Для того щоб досліджувати поводження ряду в якій-небудь певній крапці , складемо зручне вираження для його часткової суми

Підставимо замість і їхні інтегральні вираження й підведемо постійні числа під знак інтеграла:

Легко перевірити тотожність

Скористаємося цією тотожністю для перетворення вираження, остаточно одержимо

 (13)

Цей інтеграл називають інтегралом Дирихле, хоча у Фур'є він зустрічається набагато раніше.

Тому що ми маємо справу з функцією від u періоду , то проміжок інтегрування по зробленому вище зауваженню можна замінити, наприклад, проміжком

Підстановкою перетворимо цей інтеграл до виду

Потім, розбиваючи інтеграл на два: і приводячи другий інтеграл шляхом заміни знака змінної теж до проміжку , прийдемо до такого остаточного вираження для часткової суми ряду Фур'є:

 (14)

Таким чином, справа зводиться до дослідження поводження саме цього інтеграла, що містить параметр n.

Для подальшого викладу матеріалу нам буде потрібно одна лема, що належить Риману, що ми залишимо без доказу.

Якщо функція безперервна або кусочно-безперервна в деякому кінцевому проміжку , то

і, аналогічно,

Якщо згадати формули, що виражають коефіцієнти Фур'є , то в якості першого безпосереднього наслідку з леми виходить твердження:

Коефіцієнти Фур'є кусочно-безперервної функції при прагнуть до нуля.

Другим безпосереднім наслідком є так званий "принцип локалізації".

Взявши довільне позитивне число , розіб'ємо інтеграл в (14) на два: . Якщо другий з них переписати у вигляді

те стане ясно, що множник при синусі

є кусочно-безперервною функцією від t у проміжку . У цьому випадку по лемі цей інтеграл при прагне до нуля, так що й саме існування межі для часткової суми ряду Фур'є й величина цієї межі цілком визначається поводженням одного лише інтеграла

Але в цей інтеграл входять лише значення функції f(x), що відповідають зміні аргументу в проміжку від до . Цим міркуванням доводиться "принцип локалізації", що складає в наступному:

Поводження ряду Фур'є функції f(x) у деякій крапці залежить винятково від значень, прийнятих цією функцією в безпосередній близькості розглянутої крапки, тобто в як завгодно малій її околиці.

Таким чином, якщо взяти дві функції, значення яких у довільно малій околиці збігаються, то як би вони не розходилися поза цією околицею, що відповідають цим функціям ряди Фур'є поводяться в крапці однаково: або обоє сходяться, і притім до однієї й тій же сумі, або обоє розходяться.

4. Подання функцій рядів Фур'є

Накладемо на функцію f(x) більше важка вимога, а саме-припустимо її у проміжку .

Тоді має місце загальна теорема:

Теорема. Якщо функція f(x) з періодом кусочно-диференцуєма в проміжку , то її ряд Фур'є в кожній крапці сходиться й має суму

Ця сума, мабуть, дорівнює , якщо в крапці функція безперервна.

Доказ. Відзначимо, що рівність (14) має місце для кожної функції f(x), що задовольняє поставленим умовам. Якщо, зокрема, взяти, то , і з (14) одержимо, що

Множачи обидві частини рівності на постійне число й віднімаючи результат з (14), знайдемо

для нашої мети потрібно довести, що інтеграл праворуч при прагне до нуля.

Представимо його у вигляді

 (15)

де покладено

 (16)

якби нам удалося встановити що ця функція кусочно-безперервна, то з леми попереднього параграфа варто було б уже, що інтеграл (15) має межу нулю при . Але в проміжку функція g(x) взагалі безперервна, за винятком хіба лише кінцевого числа крапок, де вона може мати перегони-тому що така функція f(x). Залишається відкритим лише питання про поводження функції g(x) при .

Ми доведемо існування кінцевої межі

;

поклавши тоді g(0)=K, ми в крапці t=0 одержимо безперервність, і застосування леми виявиться виправданим. Але другий множник у правій частині рівності (16) явно має межею одиницю; звернемося до вираження квадратних дужках.

Нехай, для простати, спочатку крапка лежить усередині проміжку, де функція f(x) диференцуєма. Тоді , і кожне зі співвідношень

 (17)

прагне до межі , а — до нуля. Якщо ж є "крапка стику", то при цьому вона може виявитися як крапкою безперервності, так і крапкою розриву. У першому випадку ми знову зштовхнемося з відношенням (17), але вони будуть прагнути цього разу до різних меж, відповідно-до похідній праворуч і до похідної ліворуч. До аналогічного результату прийдемо й у випадку розриву, але тут заміниться значеннями тих функцій, від склеювання яких вийшла дана, а межами відносин (17) будуть однобічні похідні згаданих функцій при .

Отже, наш висновок справедливо у всіх випадках.

5. Випадок неперіодичної функції

Вся побудована вище теорія виходила із припущення, що задана функція визначена для всіх речовинних значень x і притім має період . Тим часом найчастіше доводиться мати справа з неперіодичною функцією f(x), інший раз навіть заданої тільки в проміжку .

Що б мати право застосувати до такої функції викладену теорію, уведемо замість її допоміжну функцію певну в такий спосіб. У проміжку ми ототожнюємо з f(x):

 (18)

потім думаємо

а на інші речовинні значення x поширюємо функцію за законом періодичності.

До побудованого в такий спосіб функції з періодом можна вже застосувати доведену теорему розкладання. Однак, якщо мова йде про крапку , що строго лежить між і , те, через (18), нас довелося б мати справа із заданою функцією . По тій же причині й коефіцієнти розкладання можна обчислити по формулах обчислення коефіцієнтів не переходячи до допоміжної функції. Коротше кажучи, все доведене вище безпосередньо переноситься на задану функцію , минаючи допоміжну функцію .

Особливої уваги, однак, вимагають кінці проміжку . При застосуванні до функції теореми попереднього параграфа, скажемо, у крапці , нам довелося б мати справа як зі значеннями допоміжної функції праворуч від , де вони збігаються вже зі значеннями праворуч від ю Тому для як значення належало б взяти

.

Таким чином, якщо задана функція навіть безперервна при , але не має періоду , так що , те-при дотриманні вимог сумою ряду Фур'є буде число

відмінне як від , так і від . Для такої функції розкладання має місце лише у відкритому проміжку .

Наступне зауваження так само заслуговує на особливу увагу. Якщо тригонометричний ряд

сходиться в проміжку до функції , то через те, що його члени мають період , він сходиться всюди, і сума його теж виявляється періодичною функцією з періодом . Але ця сума поза зазначеним проміжком взагалі вже не збігається з функцією .

6. Випадок довільного проміжку

Припустимо, що функція задана в проміжку довільної довжини в ньому. Якщо вдатися до підстановки

,

те вийде функція від у проміжку , теж кусочно-диференцуєма, до якої вже прикладемо розгляду попереднього параграфа. Як ми бачили, за винятком крапок розриву й кінців проміжку, можна розкласти її в ряд Фур'є:

коефіцієнти якого визначаються формулами Ейлера-Фур'є:



повернемося тепер до колишньої змінного , думаючи

.

Тоді одержимо розкладання заданої функції в тригонометричний ряд трохи зміненого виду:

 (19)

Тут косинуси й синуси беруться від кутів, кратних не , а . Можна було б і формули для визначення коефіцієнтів розкладання перетворити тією же підстановкою до виду

 (20)



Відносно кінців проміжку зберігають силу зауваження, зроблені в попередньому параграфі щодо крапок Звичайно, проміжок може бути замінений будь-яким іншим проміжком довгі зокрема, проміжком . В останньому випадку формули (20) повинні бути замінені формулами

 (20a)



7. Випадок парних і непарних функцій

Якщо задана в проміжку функція буде непарної, то очевидно

У цьому легко переконається:

.

Таким же шляхом установлюється, що у випадку парної функції :

.

Нехай тепер буде кусочно-диференцуєма в проміжку парна функція. Тоді добуток виявиться непарною функцією, і по сказаному

Таким чином, ряд Фур'є парної функції містить одні лише косинусів:

 (21)

Тому що в цьому випадку буде теж парною функцією, те, застосувавши сюди друге зі зроблених вище зауважень, можемо коефіцієнти розкладання написати у вигляді

(22)

Якщо ж функція буде непарної, то непарної буде й функція , так що



Ми доходимо висновку, що ряд Фур'є непарної функції містить одні лише синусів:

(23)

При цьому через парність добутку можна писати:

 (24)

Відзначимо, що кожна функція , задана в проміжку , може бути представлена у вигляді суми парних і непарної тридцятимільйонних функцій:

,

Де

Очевидно, що ряд Фур'є функції саме й складеться з розкладання по косинусах функції й розкладання по синусах функції .

Припустимо, далі, що функція задана лише в проміжку . Бажаючи розкласти її в цьому проміжку в ряд Фур'є ми доповнимо визначення нашої функції для значень x у проміжку по сваволі, а потім застосуємо сказане в пункті "Випадок неперіодичної функції".

Можна використовувати сваволю у визначенні функції в проміжку так, що б одержати для розкладання тільки лише по косинусах або тільки по синусах. Дійсно, представимо семі, що для ми думаємо , так що в результаті виходить парна функція в проміжку . Її розкладання, як ми бачили, буде містити одні лише косинуси. Коефіцієнти розкладання можна обчислювати по формулах (22), куди входять лише значення спочатку заданої функції .

Аналогічно, якщо доповнити визначення функції за законом непарності, то вона стане непарної й у її розкладанні будуть одні лише синуси. Коефіцієнти її розкладання визначаються по формулах (24).

Таким чином, задану в проміжку функцію при дотриманні умов виявляється можливим розкладати як по косинусах, так і по одним лише синусах.

Особливого дослідження вимагають крапки й . Тут обоє розкладання поводяться по-різному. Припустимо, для простоти, що задана функція безперервна при й , і розглянемо спочатку розкладання по косинусах. Умова , насамперед, зберігає безперервність при , так що ряд (21) при буде сходитися саме к. Тому що, далі,

те й при має помста аналогічна обставина.

Інакше є справа з розкладанням по синусах. У крапках і сума ряду (23) явно буде нулем. Тому вона може дати нам значення й, мабуть, лише в тому випадку, якщо ці значення дорівнюють нулю.

Якщо функція задана в проміжку те, удавшись до тієї ж заміни змінної, що й у попередньому параграфі, ми зведемо питання про розкладання її в ряд по косинусах

або в ряд по синусах

до тільки що розглянутого. При цьому коефіцієнти розкладань обчислюються, відповідно, по формулах

або

 .

8. Приклади розкладання функцій у ряд Фур'є

Функції, які нижче приводяться як приклади, як правило, ставляться до класу диференцуємих або кусочно-диференцуємих. Тому сама можливість їхнього розкладання в ряд Фур'є-Поза сумнівом, і на цьому ми зупинятися не будемо.

Всі завдання взяті зі Збірника задач і вправ по математичному аналізі, Б. Н. Демидович.

№ 2636. Функцію розкласти в ряд Фур'є.

Тому що функція є непарної, те, отже, буде парною. Тому її розкладання в ряд Фур'є містить одні лише косинусів.

Знайдемо коефіцієнти розкладання;

№ 2938. Розкласти в ряд Фур'є функцію . Зобразити цієї функції й графіки декількох приватних сум ряду Фур'є цієї функції.

Функція непарна, тому її розкладання буде містити одні лише синуси.

Тобто, виходить, що при парних значеннях n коефіцієнт , а отже й весь доданок, звертається в нуль. Тому підсумовування йде тільки лише за парним значенням n.

Ряд Фур'є для цієї функції прийме наступний вид:

.

Нижче зображені графіки функцій і декількох часток сум ряду Фур'є:

Графік функції , , і

№ 2940. в інтервалі .

Функція непарна.

№ 2941. в інтервалі .

У підсумку одержуємо ряд Фур'є:

№ 2941. в інтервалі .

Функція парна.

Як і в № 2938, у нас при парних значеннях n коефіцієнт звертається в нуль. Тому підсумувати будемо лише за непарним значенням.

У підсумку одержимо:

№ 2950. в інтервалі .

Функція парна.

Тому що при n=1 знаменник звертається в нуль, то підсумовування необхідно зробити починаючи у двійки.

№ 2951. в інтервалі .

Функція непарна.

№ 2961. Функцію розкласти а) в інтервалі по косинусах кратних дуг; б) в інтервалі по синусах кратних дуг; в) в інтервалі . Зобразити графік функції й сум рядів Фур'є для кожного окремого випадку. Використовуючи розкладання, знайти суми рядів: ; і .

а)

І, нарешті одержуємо розкладання в ряд Фур'є:

б)



в)



№ 2962 Виходячи з розкладання

 ,

По членним інтегруванням одержати розкладання в ряд Фур'є на інтервалі функцій

інтегруємо рівність по членне, одержимо

І остаточно одержуємо:

Інтегруємо отриману рівність повторно

або звідси одержуємо

.

Список літератури

1.І.М. Уваренков, М.З. Маллер Курс математичного аналізу., - К., 2006

2.Г.М. Фихтенгольц Курс диференціального й інтегрального вирахування. – К., 2005р.

3.В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов Курс вищої математики. – К., 2005

4.Н.Я. Виленкин, В.В. Цукерман, М.А. Доброхотова, А.Н. Сафонов Ряди. – К., 1997

5.Б.П. Демидович Збірник задач і вправ по математичному аналізу. – К., 2005