**Методы квантования систем с нелинейной геометрией фазового пространства**

Шарапов Алексей Анатольевич

Последние несколько лет мои научные интересы были связаны в основном с развитием общих методов квантования систем с нелинейной геометрией фазового пространства и приложением этих методов к различным задачам теоретической физики. Дело в том, что практически все интересные модели фундаментальных взаимодействий (включая Стандартную модель, Эйнштейновскую гравитацию, теорию струн и пр.) - это теории с калибровочной симметрией или, в более широком контексте, гамильтоновыми системами со связями. Последнее означает, что эффективная динамика в этих моделях развивается не во всем фазовом пространстве, а лишь на некоторых поверхностях, оснащенных нелинейными скобками Пуассона. Нелинейность скобок Пуассона, а также нетривиальность глобальной геометрии эффективного фазового пространства создают серьезные трудности при построении последовательного квантовомеханического описания таких моделей и требуют привлечения весьма изощренных математических методов, не входивших ранее в стандартный набор инструментов теоретической физики.

С другой стороны, исследования в данной области теоретической физики породили новые идеи и конструкции, оказавшие значительное воздействие на развитие математической мысли. Несколько упрощая, можно сказать, что работа нашей научной группы была направлена на "глобализацию" методов БРСТ-квантования (наиболее разработанной схемы квантования калибровочных теорий общего вида) и их "синтез" с методами деформационного квантования, получившими большое развитие в математике в самое последнее время.

Следует отметить, что приложение методов деформационного квантования к теоретико-полевым моделям приводит к необходимости решить ряд специфических вопросов, выходящих за рамки чисто формальной математической процедуры. Например, наличие квантовых расходимостей в теории поля делает нетривиальным вопрос о выборе правильной схемы квантования даже для полей с простой геометрией. В настоящее время принято считать, что последовательное квантование теоретико-полевых моделей должно основываться на представлении операторов рождения-уничтожения, то есть виковском символе для полевых операторов. К сожалению, для большинства физических моделей такое представление известно лишь на уровне свободных полей, а вклад взаимодействия учитывается пертурбативно. Несмотря на известные достижения пертурбативной теории поля, такое разложение на свободную часть и взаимодействие не всегда адекватно физической ситуации, так как может разрушать фундаментальные симметрии исходной классической модели. Важными примерами здесь могут служить нелинейные сигма-модели, в частности струны в пространствах ненулевой кривизны.

Мы развили общий геометрический подход к построению виковского квантования на общих симплектических многообразиях, оснащенных виковской поляризацией. Мы также изучили геометрию таких многообразий и нашли явные когомологические препятствия к эквивалентности вейлевского и виковского квантований. В частности, для случая кэлеровых многообразий нам удалось показать, что оба упомянутых типа квантования эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующее кэлерово многообразие является многообразием Калаби-Яу. В последующей работе мы обобщили данную схему квантования на случай присутствия в теории дополнительных связей второго рода.

В настоящее время концепция деформационного квантования рассматривается не только как эффективный инструмент квантования уже сформулированных физических моделей, но и как метод построения новых. В качестве последних примеров такого рода можно упомянуть калибровочные модели на некоммутативных пространствах и теории высших спинов. Здесь теория деформационного квантования тесно сближается с идеями некоммутативной геометрии, являясь, по существу, основным методом конструирования некоммутативных пространств на основе коммутативных. В русле развития этих идей мы предложили модель бозонной струны с некоммутативной геометрией мирового листа. Ключевое наблюдение, лежащее в основе этой конструкции, состояло в том, что все пререквизиты, необходимые для построения деформации (симплектическая структура и связность), уже содержатся в исходной теории в форме метрики Полякова, которая, таким образом, определяет геометрию мировой поверхности струны и ее деформацию. Другая интересная особенность этой модели - замечательная аналогия между уравнениями движения некоммутативной струны и уравнениями Янга-Миллса. Использование этой аналогии позволило нам найти и описать широкий класс точных решений, являющихся струнными аналогами инстантонов Янга-Миллса. Также было показано, что наличие некоммутативности эквивалентно включению взаимодействия бозонной струны с бесконечным мультиплетом фоновых полей, подчиненных условиям W-симметрии.

Как правило, в рамках гамильтоновой механики нелинейные скобки Пуассона возникают не сами по себе, а ассоциируются с теми или иными алгебраическими/геометрическими структурами, например с группой симметрии фазового пространства. Большой запас нелинейных скобок Пуассона, связанных с дополнительными симметриями, доставляют интегрируемые системы, начиная с хрестоматийного волчка Эйлера и заканчивая группами Пуассона-Ли "одевающих преобразований" солитонных уравнений. В этой связи встает вопрос о построении специальных типов квантования, согласованных с этими дополнительными структурами. Мы предложили ковариантный метод квантования скобок Пуассона, ассоциированных с классическим уравнением Янга-Бакстера, являющийся некоторым далеко идущим обобщением квантования Федосова.

Оказалось, что данная схема квантования допускает чисто алгебраическую переформулировку и может быть использована, например, для построения квантовых групп и би-алгебр Ли. В частности, предложенное в этой работе \*-произведение решает в общем виде задачу о нахождении универсальной деформационной формулы, известной ранее лишь для очень специальных классов алгебр Ли. В дальнейшем на основе БРСТ-теории мы обобщили схему квантования на случай (нерегулярных) скобок Пуассона, ассоциированных с симплектическими алгеброидами Ли. Попытка распространить данный метод на произвольные пуассоновы многообразия вскрыла ряд новых дифференциально-геометрических конструкций, по-видимому неизвестных ранее в математике, обобщающих понятие квазисимплектического многообразия на случай n-алгеброидов Ли (алгеброидов с высшими нетривиальными гомотопиями). Квантование алгебры наблюдаемых на таких многообразиях представляется очень интересным и многообещающим направлением исследований.

Еще одно направление моей научной деятельности, никак не связанное с предыдущим, - исследование проблемы реакции излучения и перенормировки в классической теории поля с сингулярными источниками. В простейшей постановке этой задачи речь идет об описании эффективной динамики точечного заряда с учетом радиационного трения (при неравномерном движении, как известно, любой заряд с необходимостью излучает и, следовательно, теряет энергию). Хотя для массивной заряженной частицы, движущейся в четырехмерном пространстве-времени, эта задача была решена еще Дираком (соответствующее уравнение называется теперь уравнением Лоренца-Дирака), безмассовый случай, а также случаи высших измерений оставались не изученными до самого последнего времени. Мы построили соответствующие обобщения уравнения Лоренца-Дирака и при этом обнаружили новые интересные моменты. Например, эффективные уравнения движения для безмассовой частицы имеют более высокий порядок, чем для массивной, а учет самодействия частицы в пространстве большего числа измерений не сводится к перенормировке ее массы, но требует вовлечения дополнительных контр-членов, не имеющих аналогов в исходной теории. Последнее обстоятельство указывает, в частности, на ограниченность традиционного отождествления проблемы самодействия точечной частицы с проблемой "собственной массы".

Исследование эффективных уравнений движения для безмассовой частицы показало, что учет реакции излучения приводит к нестабильности классической динамики в пределе выключения взаимодействия. Это может теоретически объяснить отсутствие экспериментальных данных о существовании таких частиц в природе. В дальнейшем мы использовали этот подход для построения эффективного действия и уравнений движения для протяженных релятивистских объектов (p-бран), взаимодействующих с полями (p+1)-форм. Было показано, что при регулярном вложении мировой поверхности браны в объемлющее пространство все возникающие расходимости являются лагранжевыми и могут быть сокращены за счет введения конечного числа контр-членов. Кроме того, мы нашли специальные типы неминимального взаимодействия, для которых эффективные уравнения движения р-браны оказываются локальными и лагранжевыми. В дальнейшем предполагается распространить эти результаты на случай взаимодействия р-браны с динамическим фоном гравитации, скалярными полями и пр. Мы предполагаем, что наложение условия взаимного сокращения расходимостей может стать эффективным критерием отбора фундаментальных моделей взаимодействия.